

# Eine kurze Einführung in lineare gewöhnliche Differentialgleichungen

Autor: Jan KRAUSE

15. Juli 2016

For updates, further material and reporting errors please visit <http://jkphysics.de>.

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>	5.7	Beispiel: Gedämpfter harmonischer Oszillator mit harmonische Inhomogenität . . . . .	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>Lineare DGL 1. Ordnung ohne Inhomogenität</b>	<b>3</b>	<b>6</b>	<b>Lineare DGL <math>n</math>-ter Ordnung mit variablen Koeffizienten ohne Inhomogenität</b>	<b>9</b>
2.1	Trennung der Variablen . . . . .	3	6.1	Reduktionssatz von d'Alembert . . . . .	9
2.2	Beispiel . . . . .	3	6.2	Potenzreihenansatz . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Lineare DGL 1. Ordnung mit Inhomogenität</b>	<b>3</b>	<b>7</b>	<b>Lineare DGL <math>n</math>-ter Ordnung mit variablen Koeffizienten mit Inhomogenität</b>	<b>10</b>
3.1	Variation der Konstanten . . . . .	3	7.1	Variation der Konstanten . . . . .	10
3.2	Beispiel . . . . .	4	<b>8</b>	<b>Wronski-Determinante</b>	<b>10</b>
<b>4</b>	<b>Lineare DGL <math>n</math>-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten ohne Inhomogenität</b>	<b>4</b>	<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	
4.1	Exponentialansatz . . . . .	4		Im folgenden soll eine kurze Einführung in die Lösungstheorie linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen <sup>1</sup> ( <b>DGL</b> ) gegeben werden.	
4.2	Beispiel . . . . .	4		Unter anderem ist praktisch jede physikalische Theorie als Motivation für deren Betrachtung zu verstehen, da diese im Regelfall nur Differentialgleichungen (so genannte Bewegungsgleichungen) liefern. Diese müssen dann noch mit Mitteln der Lösungstheorie für Differentialgleichungen gelöst werden. Im Falle der Newtonschen Mechanik bezeichnet man dann z.B. die Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$ eines Massenpunktes als Lösung. Im Rahmen der Quantenmechanik bezeichnet man z.B. die Wellenfunktion $\psi(\mathbf{r}, t)$ als Lösung.	
4.3	Beispiel: gedämpfter harmonischer Oszillator . . . . .	5		Ziel soll es nun sein, Lösungen von Gleichungen	
<b>5</b>	<b>Lineare DGL <math>n</math>-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten mit Inhomogenität</b>	<b>6</b>			
5.1	Variation der Konstanten . . . . .	6			
5.2	Beispiel . . . . .	6			
5.3	Greensfunktion . . . . .	7			
5.4	Beispiel: Gedämpfter harmonischer Oszillator mit konstanter Inhomogenität . . . . .	7			
5.5	Lösung raten . . . . .	8			
5.6	Beispiel: Gedämpfter harmonischer Oszillator mit konstanter Inhomogenität . . . . .	8			

<sup>1</sup>Unter einer gewöhnlichen DGL versteht man eine solche, welche sich als  $f(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) = 0$  schreiben lässt, und in der die gesuchte Funktion  $x(t)$  insbesondere nur von einer Variablen abhängt.

<sup>2</sup> $x^{(k)} \equiv x^{(k)}(t) \equiv \frac{d^k}{dt^k} x(t)$  bezeichne die  $k$ -te Ableitung der Funktion  $x(t)$  nach der Variable  $t$ . Im Kontext von Differentialgleichungen ist es üblich auf die explizite Angabe des Arguments der Funktion  $x(t)$  zu verzichten, also lediglich  $x$  zu schreiben.

der Form<sup>2</sup>

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_0(t)x = f(t) \quad (1.1)$$

zu finden, wobei die Lösung dieser Gleichung eine Funktion  $x \equiv x(t)$  ist (und nicht lediglich eine Zahl). Die Zahl  $n$  bezeichnet man als Ordnung der Differentialgleichung. Der Term  $f(t)$  wird als **Inhomogenität** bezeichnet, die  $a_k(t)$  als Koeffizientenfunktionen. Es sei angemerkt, dass der Variable  $t$  je nach Problem eine andere Bedeutung zukommen kann. Ist sie nicht als Zeit zu verstehen, so benennt man sie der Übersicht halber meist anders.

Wir wollen im folgenden annehmen, dass die Koeffizientenfunktionen und die Inhomogenität auf einem Intervall  $J$  stetig sind.

Liegt eine DGL nicht in der sogenannten **Normalform** wie in (1.1) vor, so muss die DGL zuerst in diese Form gebracht werden.

Zur Lösung geht man üblicherweise derart vor, dass man zuerst die zugehörige **homogene DGL** löst, welche sich durch Weglassen der Inhomogenität ergibt, also

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_0(t)x = 0. \quad (1.2)$$

Die zugehörige Lösung der homogenen DGL ist im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt. Vielmehr findet man ein System von genau  $n$  linear unabhängigen Lösungsfunktionen

$$\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}.$$

welches man als **Fundamentalsystem** bezeichnet. Die allgemeine Lösung ist dann der Vektorraum welcher sich durch beliebige Linearkombinationen der Fundamentallösungen ergibt. Dieser wird auch als **Lösungsraum** bezeichnet und ein beliebiges Element aus diesem lässt sich darstellen als

$$x_h(t, C_1, \dots, C_n) = C_1x_1(t) + \dots + C_nx_n(t).$$

Diese beinhaltet also noch  $n$  Konstanten  $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{C}$ . Insbesondere ist  $x(t) = 0$  immer eine Lösung der homogenen DGL.

Falls eine Inhomogenität vorliegt, also  $f(t) \neq 0$ , muss außerdem eine sogenannte **Partikulärlösung**<sup>3</sup>  $x_p(t)$  der vollständigen DGL gefunden werden. Die allgemeine Lösung setzt sich dann aus beiden Lösungen zusammen, also

$$x(t, C_1, \dots, C_n) = x_h(t, C_1, \dots, C_n) + x_p(t)$$

<sup>3</sup>Manchmal auch *spezielle Lösung* genannt.

<sup>4</sup>Diese heißen in der Physik auch *Anfangsbedingungen*.

und beschreibt einen  $n$ -dimensionalen Lösungsraum, welcher nun kein Vektorraum mehr ist (auch affiner Raum genannt). Weitere Lösungen existieren nicht.

Eine eindeutige Lösung ergibt sich, wenn man zusätzlich die Erfüllung von  $n$  unabhängigen Randbedingungen<sup>4</sup>

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0 \\ x^{(1)}(t_0) &= x_0^{(1)} \\ &\vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) &= x_0^{(n-1)} \end{aligned}$$

fordert, wodurch die  $n$  Konstanten  $C_1, \dots, C_n$  festgelegt werden.

Wir werden uns der allgemeinen Lösung von (1.1) schrittweise nähern und dazu folgende Verfahren ansprechen

- Trennung der Variablen
- Variation der Konstanten
- Exponentialansatz
- Greensfunktion

Die vorliegende Einführung kann aufgrund der Kürze natürlich nur einen kurzen Einblick in den sehr umfangreichen Themenkomplex der Differentialgleichungen geben. Vertieft und mathematisch sauber erschlossen wird der hier präsentierte Stoff im 3. Semester in der Vorlesung "gewöhnliche Differentialgleichungen" des Fachbereichs Mathematik.

Einen sehr umfangreichen aber dennoch für Erstsemester zugänglichen Einstieg (mit Beispielen aus der Physik) bietet das Buch von Harro Heuser [Heu09]. Von besonderem Interesse sind hier die Kapitel 15 und 16.

Es wird im Folgenden vorausgesetzt, dass die Studierenden mit komplexen Zahlen, der Integration in einer Dimension sowie elementaren Termumformungen vertraut sind.

## 2 Lineare DGL 1. Ordnung ohne Inhomogenität

### 2.1 Trennung der Variablen

In diesem Abschnitt wollen wir uns zunächst der Lösung von Differentialgleichungen der Form<sup>5</sup>

$$\dot{x} + a_0(t)x = 0.$$

Wir bedienen uns dabei der sogenannten **Trennung der Variablen**. Diese basiert auf der Idee  $\dot{x}$  als  $\frac{dx}{dt}$  zu schreiben und dann alle Terme, welche ein  $x$  enthalten auf eine Seite der Gleichung zu bringen, und alle Terme welche ein  $t$  oder  $dt$  enthalten auf die andere. Anschließend wird integriert. Also:

$$\begin{aligned} \dot{x} + a_0(t)x &= 0 \\ \Rightarrow \frac{dx}{dt} + a_0(t)x &= 0 \\ \Rightarrow dx &= -a_0(t)x dt \\ \Rightarrow \frac{dx}{x} &= -a_0(t) dt \\ \Rightarrow \int \frac{1}{x} dx &= - \int a_0(t) dt + \tilde{C} \\ \Rightarrow \ln x &= - \int a_0(t) dt + \tilde{C} \\ \Rightarrow x &= \exp\left(- \int a_0(t) dt + \tilde{C}\right) \\ \Rightarrow x &= C \exp\left(- \int a_0(t) dt\right) \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung ergibt sich also zu

$$x(t, C_1) = C_1 \exp\left(- \int a_0(t) dt\right).$$

### 2.2 Beispiel

Als Beispiel wollen wir die Lösung von

$$x' - \frac{1}{t}x = 0$$

finden. Es ist also  $a_0(t) = -\frac{1}{t}$ . Mit dem Ergebnis des vorigen Abschnitts finden wir

$$\begin{aligned} x(t, C_1) &= C_1 \exp\left(- \int a_0(t) dt\right) \\ &= C_1 \exp\left(\int \frac{1}{t} dt\right) \\ &= C_1 \exp(\ln t) \\ &= C_1 t. \end{aligned}$$

Test: Wir setzen die erhaltene Lösung in die DGL ein und finden

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t, C_1) - \frac{1}{t}x(t, C_1) &= 0 \\ \frac{d}{dt}C_1 t - \frac{1}{t}C_1 t &= 0 \\ C_1 - C_1 &= 0, \end{aligned}$$

wie gewünscht.

## 3 Lineare DGL 1. Ordnung mit Inhomogenität

### 3.1 Variation der Konstanten

(vgl. [Heu09, Satz 4.4])

Wir betrachten den Fall

$$x' + a_0(t)x = f(t).$$

In solchen Fällen führt die Variation der Konstanten zur Lösung. Sie funktioniert nach dem folgenden Prinzip:

- Löse die homogene DGL (Trennung der Variablen), was zur allgemeinen Lösung  $x_h(t, C_1)$  führt.
- Ersetze die Konstante  $C_1$  durch eine noch zu bestimmende Funktion  $K_1(t)$  und setze den resultierenden Lösungsansatz in die inhomogene DGL ein.
- Bestimme  $K_1(t)$  durch Separation der Variablen.

<sup>5</sup>Folgende Schreibweisen werden häufig synonym verwendet:  $\dot{x} \equiv x' \equiv x^{(1)} \equiv \frac{d}{dt}x \equiv \frac{dx}{dt}$  und

$\ddot{x} \equiv x'' \equiv x^{(2)} \equiv \frac{d^2}{dt^2}x \equiv \frac{d^2x}{dt^2} \equiv \frac{d}{dt}\frac{d}{dt}x \equiv \left(\frac{d}{dt}\right)^2 x$ , wobei man  $\frac{d}{dt}$  häufig als Differentialoperator versteht. Für höhere Ableitungen schreibt man meist  $x^{(k)}$  oder  $x^{(k)}(t)$  anstelle von  $\left(\frac{d}{dt}\right)^k x(t)$ .

### 3.2 Beispiel

Wir wollen das Beispiel

$$x' - \frac{1}{t}x = 5t$$

betrachten.

- Die Lösung

$$x_h(t, C_1) = C_1 t$$

der homogenen DGL wurde bereits im vorigen Abschnitt durch Trennung der Variablen bestimmt.

- Ersetzen von  $C_1$  durch  $K_1(t)$  liefert

$$\begin{aligned} x(t) &= K_1(t)t & \text{und} \\ x'(t) &= K_1'(t)t + K_1(t). \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in die DGL finden wir

$$\begin{aligned} K_1'(t)t + K_1(t) - \frac{1}{t}K_1(t)t &= 5t \\ \Rightarrow K_1'(t)t &= 5t \\ \Rightarrow K_1(t) &= 5t + C \end{aligned}$$

Da wir nur eine Partikulärlösung benötigen und die Konstante  $C$  hier durch keine Bedingungen festgelegt wird, können wir sie auf Null setzen und erhalten damit die Partikulärlösung

$$x_p(t) = 5t^2.$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL ergibt sich somit zu

$$x(t, C_1) = x_h(t, C_1) + x_p(t) = C_1 t + 5t^2.$$

## 4 Lineare DGL $n$ -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten ohne Inhomogenität

### 4.1 Exponentialansatz

Wir betrachten also den Fall

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_0x = 0. \quad (4.1)$$

In diesem Fall führt immer der Ansatz

$$x(t) = e^{\lambda t}$$

zum Ziel. Die  $k$ -te Ableitung dieses Ansatzes ist gegeben durch  $x^{(k)}(t) = \lambda^k e^{\lambda t}$  und durch Einsetzen in (4.1) finden wir

$$e^{\lambda t}(\lambda^n + \lambda^{n-1}a_{n-1} + \dots + a_0) = 0.$$

Da  $e^{\lambda t} \neq 0$  für alle  $t$  muss gelten

$$p(\lambda) := \lambda^n + \lambda^{n-1}a_{n-1} + \dots + a_0 = 0,$$

wobei man  $p(\lambda)$  als charakteristisches Polynom der DGL bezeichnet. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra besitzt dieses Polynom genau  $n$  algebraische Nullstellen  $\lambda_k \in \mathbb{C}$  mit  $k \in \{1, \dots, n\}$ , welche es zu bestimmen gilt. Das Fundamentalsystem (Basis des Lösungsvektorraumes) ist dann gegeben durch

$$\{e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\}$$

und die allgemeine Lösung lautet somit

$$x(t, C_1, \dots, C_n) = C_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t}.$$

Im Falle von Entartung, also der Gleichheit mehrerer Nullstellen, ergibt das beschriebene Verfahren jedoch weniger als  $n$  Lösungsfunktionen und das Fundamentalsystem muss daher erweitert werden. Ist  $\lambda_k$   $m$ -fach entartet, dann muss das Fundamentalsystem um

$$\{t e^{\lambda_k t}, \dots, t^{m-1} e^{\lambda_k t}\}.$$

ergänzt werden. Analog wird das Fundamentalsystem für alle übrigen entarteten Eigenwerte erweitert, sodass es am Ende aus  $n$  linear unabhängigen Funktionen besteht.

(vgl. hierzu [Heu09, Satz 15.3])

### 4.2 Beispiel

(vgl. [Heu09, Bsp 16.10])

Betrachte

$$\ddot{x} + 4\dot{x} = 0.$$

Das Charakteristische Polynom dieser DGL lautet

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda = 0$$

und hat offenbar die Lösungen  $\lambda_1 = 0$  und  $\lambda_2 = -4$ . Das Fundamentalsystem ist daher gegeben durch

$$\{x_1(t) := 1, x_2(t) := e^{-4t}\}$$

und die allgemeine Lösung lässt sich schreiben als

$$x(t, C_1, C_2) = C_1 + C_2 e^{-4t}.$$

### 4.3 Beispiel: gedämpfter harmonischer Oszillator

Die zugehörige DGL ist gegeben durch

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \gamma, \omega_0 > 0$$

Durch den Exponentialansatz finden wir

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0,$$

was schließlich

$$\lambda_{1/2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

liefert (p-q-Formel oder quadratische Ergänzung). Wir unterscheiden nun 3 Fälle:

Fall 1:  $\gamma < \omega_0$

(schwache Dämpfung, periodischer Fall)

Mit der Definition  $\omega := \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$  finden wir dann

$$\lambda_{1/2} = -\gamma \pm i\omega.$$

Das Fundamentalsystem ist daher gegeben durch

$$\{e^{(-\gamma+i\omega)t}, e^{(-\gamma-i\omega)t}\}$$

und die allgemeine Lösung ergibt sich als Linearkombination beider Lösungen zu

$$x(t, C_1, C_2) = e^{-\gamma t} (C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}).$$

Fall 2:  $\gamma > \omega_0$

(starke Dämpfung, aperiodischer Fall, Kriechfall)

Mit der Definition  $\omega := \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$  finden wir dann

$$\lambda_{1/2} = -\gamma \pm \omega.$$

Das Fundamentalsystem ist daher gegeben durch

$$\{e^{(-\gamma+\omega)t}, e^{(-\gamma-\omega)t}\}$$

und die allgemeine Lösung ergibt sich als Linearkombination beider Lösungen zu

$$x(t, C_1, C_2) = e^{-\gamma t} (C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}).$$

Fall 3:  $\gamma = \omega_0$

(aperiodischer Grenzfall)

Wir finden diesmal nur eine Lösung

$$\lambda_{1/2} = \lambda = -\gamma$$

da der Eigenwert  $\lambda$  2-fach entartet ist (man sagt auch: er hat die algebraische Vielfachheit 2). Das Fundamentalsystem muss daher erweitert werden um  $te^{\lambda t}$  und wir erhalten das Fundamentalsystem

$$\{e^{-\gamma t}, te^{-\gamma t}\}.$$

Die allgemeine Lösung ergibt sich als Linearkombination beider Lösungen zu

$$x(t, C_1, C_2) = e^{-\gamma t} (C_1 + C_2 t).$$

Anfangsbedingungen:

Wir wollen nun Anfangsbedingungen (Randbedingungen) verwenden um eindeutige Lösungen zu erhalten, welche dann verglichen werden können. Als Anfangsbedingung für alle drei Fälle wählen wir

$$x(0) = 1 \quad \dot{x}(0) = 0.$$

Es ergeben sich folgende eindeutige Lösungen:

Fall 1:  $\gamma < \omega_0$

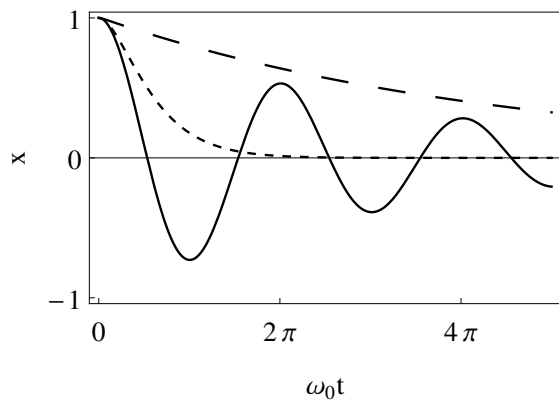
$$x(t) = \frac{e^{-\gamma t}}{\sqrt{\frac{\omega_0^2}{\gamma^2} - 1}} \sin\left(\omega_0 t \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{\omega_0^2}}\right) e^{-\gamma t} \cos\left(\omega_0 t \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{\omega_0^2}}\right)$$

Fall 2:  $\gamma > \omega_0$

$$x(t) = \frac{e^{-\gamma t}}{\sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\gamma^2}}} \sinh\left(\omega_0 t \sqrt{\frac{\gamma^2}{\omega_0^2} - 1}\right) e^{-\gamma t} \cosh\left(\omega_0 t \sqrt{\frac{\gamma^2}{\omega_0^2} - 1}\right)$$

Fall 3:  $\gamma = \omega_0$

$$x(t) = e^{-\gamma t} (1 + \gamma t)$$



**Abbildung 1:** Vergleich der drei Lösungen. Dargestellt sind schwache Dämpfung (durchgezogen,  $\gamma/\omega_0 = 0.1$ ), starke Dämpfung (lange Striche,  $\gamma/\omega_0 = 7$ ) und aperiodischer Grenzfall (kurze Striche,  $\gamma/\omega_0 = 1$ ).

## 5 Lineare DGL $n$ -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten mit Inhomogenität

### 5.1 Variation der Konstanten

Vgl. [Heu09, S. 181].

Das Auffinden einer Lösung der homogenen DGL wurde bereits im vorigen Abschnitt besprochen und wir wollen annehmen, dass das zugehörige Fundamentalsystem durch

$$\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$$

gegeben ist. Die allgemeine Lösung der homogenen DGL lässt sich also darstellen als

$$x(t, C_1, \dots, C_n) = C_1 x_1(t) + \dots + C_n x_n(t).$$

Ziel soll es also nun sein eine Partikulärlösung der inhomogenen DGL

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_0x = f(t)$$

zu finden. Wir bedienen uns dazu wieder des Ansatzes der Variation der Konstanten, wir ersetzen also die Konstanten  $C_1, \dots, C_n$  durch Funktionen  $K_1(t), \dots, K_n(t)$ .

Zusammen mit einigen vereinfachenden Überlegungen, auf welche wir hier aus Platzgründen nicht eingehen wollen, welche sich aber ausführlich in [Heu09, Kap. 16] finden, erhalten wir das Gleichungssystem

chungssystem

$$\begin{aligned} \dot{K}_1 x_1 + \dots + \dot{K}_n x_n &= 0 \\ \dot{K}_1 x_1^{(1)} + \dots + \dot{K}_n x_n^{(1)} &= 0 \\ &\vdots \\ \dot{K}_1 x_1^{(n-2)} + \dots + \dot{K}_n x_n^{(n-2)} &= 0 \\ \dot{K}_1 x_1^{(n-1)} + \dots + \dot{K}_n x_n^{(n-1)} &= f(t) \end{aligned}$$

welches es zu lösen gilt.

### 5.2 Beispiel

(vgl. [Heu09, Bsp. 16.14])

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + 4\dot{x} = \cos 2t, \quad u(0) = 0, \dot{x}(0) = 1.$$

Das Lösungssystem der homogenen DGL hatten wir bereits in Beispiel 4.2 gefunden, es lautet

$$\{x_1(t) := 1, x_2(t) := e^{-4t}\}.$$

Ersetzen wir nun die Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  durch Funktionen  $K_1(t)$  und  $K_2(t)$ , und verwenden das oben beschriebene Gleichungssystem, so finden wir

$$\begin{aligned} \dot{K}_1 x_1 + \dot{K}_2 x_2 &= 0 \\ \dot{K}_1 \dot{x}_1 + \dot{K}_2 \dot{x}_2 &= \cos 2t \end{aligned}$$

oder mit den gefundenen Fundamentallösungen

$$\begin{aligned} \dot{K}_1 + \dot{K}_2 x_2 &= 0 \\ -4\dot{K}_2 e^{-4t} &= \cos 2t. \end{aligned}$$

Auflösen der zweiten Gleichung nach  $\dot{K}_2$  liefert sofort

$$\dot{K}_2 = -\frac{1}{4} e^{4t} \cos 2t.$$

Setzen wir nun  $\dot{K}_2$  in die erste Gleichung ein, so finden wir

$$\dot{K}_1 = \frac{1}{4} \cos 2t.$$

Integration von  $\dot{K}_1$  liefert

$$K_1(t) = \frac{1}{4} \int \cos 2t = \frac{1}{8} \sin 2t$$

wobei wir die Integrationskonstante einfach gleich Null gesetzt haben. (Wir sind ja nur an *einer* speziellen Lösung der inhomogenen DGL interessiert.) Die Integration von  $\dot{K}_2$  fällt etwas aufwendiger aus. Wir setzen

$$I(t) := \int e^{4t} \cos 2t dt$$

und finden zusammen mit  $\cos 2t = \frac{1}{2}(e^{2it} + e^{-2it})$

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{1}{2} \int e^{(4+2i)t} dt + \frac{1}{2} \int e^{(4-2i)t} dt \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{4+2i} e^{(4+2i)t} + \frac{1}{2} \frac{1}{4-2i} e^{(4-2i)t} \\ &= \frac{1}{2} \frac{4-2i}{20} e^{(4+2i)t} + \frac{1}{2} \frac{4+2i}{20} e^{(4-2i)t}, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt den ersten Term mit  $4-2i$  und den zweiten Term mit  $4+2i$  erweitert haben. Umformen liefert

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{1}{20} 4e^{4t} \frac{1}{2} (e^{2it} + e^{-2it}) - \frac{1}{20} e^{4t} (ie^{2it} - ie^{-2it}) \\ &= \frac{1}{20} 4e^{4t} \frac{1}{2} (e^{2it} + e^{-2it}) + \frac{2}{20} e^{4t} \frac{1}{2i} (e^{2it} - e^{-2it}) \\ &= \frac{4 \cos 2t + 2 \sin 2t}{20} e^{4t} \end{aligned}$$

und damit

$$K_2(t) = -\frac{1}{4} \frac{4 \cos 2t + 2 \sin 2t}{20} e^{4t}.$$

Die partikuläre Lösung ergibt sich dann schließlich zu

$$\begin{aligned} x_p(t) &= K_1(t)x_1(t) + K_2(t)x_2(t) \\ &= \frac{1}{8} \sin 2t - \frac{1}{20} \cos 2t - \frac{1}{40} \sin 2t \\ &= -\frac{1}{20} \cos 2t + \frac{1}{10} \sin 2t. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL lautet also

$$\begin{aligned} x(t, C_1, C_2) &= x_p(t) + x_h(t, C_1, C_2) \\ &= -\frac{1}{20} \cos 2t + \frac{1}{10} \sin 2t + C_1 + C_2 e^{-4t}. \end{aligned}$$

Aus den Randbedingungen folgt dann zuletzt die eindeutige Lösung

$$x(t) = -\frac{1}{20} \cos 2t + \frac{1}{10} \sin 2t + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} e^{-4t}.$$

### 5.3 Greensfunktion

Ein weiteres sehr elegantes Verfahren zur Bestimmung einer Partikulärlösung einer linearen inhomogenen DGL ist der Weg über die Greensfunktion.

Dazu geht man wie folgt vor

<sup>6</sup>Mit  $\Theta(t) = \begin{cases} 1 & , t \geq 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases}$  bezeichnen wir die Heaviside-Funktion.

- Bestimme die Lösung  $x_G(t)$  der *homogenen* DGL mit den Anfangsbedingungen

$$x_G(0) = 0, \quad \dot{x}_G(0) = 1.$$

- Die Greensfunktion ist nun gegeben durch<sup>6</sup>

$$G(t-t') = x_G(t-t')\Theta(t-t')$$

- Eine Partikulärlösung der *inhomogenen* DGL ist nun gegeben durch die Faltung der Greensfunktion  $G$  mit der Inhomogenität  $f$ , also

$$x_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t')f(t') dt'.$$

Dieses Verfahren findet unter Anderem in der klassischen Mechanik (siehe Beispiele), der Elektrodynamik und der Quantenfeldtheorie (Feynman-Propagator) Anwendung.

### 5.4 Beispiel: Gedämpfter harmonischer Oszillator mit konstanter Inhomogenität

Wir betrachten wie zuvor den gedämpften harmonischen Oszillator, diesmal jedoch mit konstanter Inhomogenität:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \quad , \quad \gamma, \omega_0 > 0, f_0 \in \mathbb{R}$$

Der Übersichtlichkeit halber wollen wir uns auf den Fall schwacher Dämpfung, also  $\gamma < \omega_0$  beschränken. Die allgemeine Lösung der homogenen DGL wurde vorher bereits mit dem Exponentialansatz bestimmt und lautet

$$x_h(t, C_1, C_2) = e^{-\gamma t} (C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}).$$

Mit den Randbedingungen  $x(0) = 0$  und  $\dot{x}(0) = 1$  finden wir

$$\begin{aligned} 0 &= x_G(0) = C_1 + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -C_1 \\ 1 &= \dot{x}_G(0) = (-\gamma + i\omega)C_1 + (-\gamma - i\omega)C_2 \\ &= (-\gamma + i\omega)C_1 - (-\gamma - i\omega)C_1 \\ &= 2i\omega C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{1}{\omega} \frac{1}{2i} = -\frac{C_2}{2} \end{aligned}$$

und damit die spezielle homogene Lösung

$$\begin{aligned} x_G(t) &= \frac{1}{\omega} \frac{1}{2i} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \\ &= \frac{1}{\omega} e^{-\gamma t} \sin(\omega t). \end{aligned}$$

Die Greensfunktion ist nun gegeben durch

$$\begin{aligned} G(t-t') &= x_G(t-t')\Theta(t-t') \\ &= \frac{1}{\omega} e^{-\gamma(t-t')} \sin(\omega(t-t'))\Theta(t-t') \end{aligned}$$

und die Partikulärlösung ergibt sich zu

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t')f(t') dt' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega} e^{-\gamma(t-t')} \sin(\omega(t-t'))\Theta(t-t')f_0 dt' \\ &\equiv \frac{f_0}{\omega} I(t). \end{aligned}$$

Das Integral  $I(t)$  lässt sich z.B. durch zweifache partielle Integration lösen. Einfacher geht es jedoch indem wir die Relation

$$\sin(x) = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix})$$

nutzen:

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma(t-t')} \sin(\omega(t-t'))\Theta(t-t') dt' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma t'} \sin(\omega t')\Theta(t') dt' \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\gamma t'} \sin(\omega t') dt' \\ &= \frac{1}{2i} \int_0^{\infty} e^{-\gamma t'} (e^{i\omega t'} - e^{-i\omega t'}) dt' \\ &= \frac{1}{2i} \int_0^{\infty} (e^{(-\gamma+i\omega)t'} - e^{(-\gamma-i\omega)t'}) dt' \\ &= \frac{1}{2i} \left[ \frac{e^{(-\gamma+i\omega)t'}}{-\gamma+i\omega} - \frac{e^{(-\gamma-i\omega)t'}}{-\gamma-i\omega} \right]_{t'=0}^{t'=\infty} \\ &= \frac{1}{2i} \left( -\frac{1}{-\gamma+i\omega} + \frac{1}{-\gamma-i\omega} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \left( -\frac{-\gamma-i\omega}{\gamma^2+\omega^2} + \frac{-\gamma+i\omega}{\gamma^2+\omega^2} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \frac{2i\omega}{\gamma^2+\omega^2} \\ &= \frac{\omega}{\gamma^2+\omega^2} \\ &= \frac{\omega}{\gamma^2+\omega_0^2-\gamma^2} \\ &= \frac{\omega}{\omega_0^2}. \end{aligned}$$

Wir erhalten also die (zeitunabhängige!) Partikulärlösung

$$x_p(t) = \frac{f_0}{\omega} I(t) = \frac{f_0}{\omega_0^2}.$$

Die allgemeine Lösung ergibt sich nun als Superposition der allgemeinen homogenen und der gefundenen speziellen Lösung zu

$$x(t, C_1, C_2) = e^{-\gamma t} (C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}) + \frac{f_0}{\omega_0^2},$$

wobei die Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  wie üblich durch beliebige Randbedingungen  $x(0) = x_0$  und  $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$  bestimmt werden können.

## 5.5 Lösungsraten

Das Auffinden einer Partikulärlösung mit Hilfe der Greensfunktion stellt zwar ein zuverlässiges Verfahren dar, ist jedoch auch mit einem gewissen Aufwand verbunden. In manchen Fällen findet man daher durch geschicktes Raten schneller zur Lösung.

## 5.6 Beispiel: Gedämpfter harmonischer Oszillator mit konstanter Inhomogenität

Betrachten wir noch einmal den Fall

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0, \quad \gamma, \omega_0 > 0, f_0 \in \mathbb{R}.$$

Wie man leicht sieht fallen die beiden Terme  $\ddot{x}$  und  $2\gamma\dot{x}$  weg, wenn man  $x(t) = C = \text{const.}$  wählt. Wir erhalten daher

$$\omega_0^2 C = f_0 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{f_0}{\omega_0^2} \quad \Rightarrow \quad x_p(t) = \frac{f_0}{\omega_0^2},$$

also offenbar die selbe Lösung wie zuvor.

## 5.7 Beispiel: Gedämpfter harmonischer Oszillator mit harmonische Inhomogenität

Als weiteres Beispiel wollen wir den Fall der harmonischen Inhomogenität

$$f(t) = f_0 \cos(\Omega t) \quad , \quad f_0, \Omega \in \mathbb{R}$$

betrachten, also

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\Omega t) \quad , \quad \gamma, \omega_0 > 0, f_0, \Omega \in \mathbb{R}.$$

Um den Umgang mit dem Problem ein wenig zu vereinfachen, komplexifizieren wir die DGL, womit folgendes gemeint ist. Obwohl wir eigentlich eine reelle Lösung  $x : J \rightarrow \mathbb{R}$  suchen, erlauben

wir komplexe Inhomogenitäten  $f(t)$  und Lösungen  $x(t)$ . Am Ende können wir dann den Realteil beider Funktionen betrachten. Unsere DGL erhält dadurch die Form

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 e^{i\Omega t}, \quad \gamma, \omega_0 > 0, \\ f_0, \Omega \in \mathbb{R}.$$

Selbstverständlich lässt sich auch diese DGL ohne Anschauung formal mit Hilfe der Greensfunktion lösen. Das Faltungsintegral ist zwar wie beim vorigen Beispiel wieder analytisch lösbar, wird jedoch noch einmal komplizierter ausfallen. Es bietet sich daher an durch geschicktes Raten eine Partikulärlösung zu finden. Es liegt der Verdacht nahe, dass das System mit der Frequenz der treibenden Inhomogenität schwingt, wobei wir zusätzlich einen Phasenversatz auftreten erlauben wollen. Unser Ansatz lautet daher <sup>7</sup>

$$x_p(t) = A e^{i\Omega t - i\varphi}, \quad A, \varphi \in \mathbb{R},$$

wobei der Phasenversatz durch  $\varphi$  kodiert ist. Einsetzen in die inhomogene DGL und Division durch  $e^{i\Omega t}$  liefert

$$A(-\Omega^2 + 2i\gamma\Omega + \omega_0^2) = f_0 e^{i\varphi} \\ = f_0 \cos(\varphi) + i f_0 \sin(\varphi).$$

Betrachten wir Real- und Imaginärteil dieser Gleichung separat, so erhalten wir

$$A(\omega_0^2 - \Omega^2) = f_0 \cos(\varphi) \\ 2\gamma\Omega A = f_0 \sin(\varphi).$$

Division der ersten durch die zweite Gleichung liefert

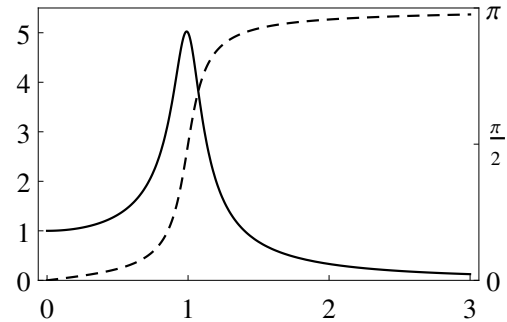
$$\tan(\varphi) = \frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \Rightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right)$$

und mit  $\sin \arctan x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$  finden wir

$$A = \frac{f_0}{2\gamma\Omega} \sin \arctan \frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \\ = \frac{f_0}{2\gamma\Omega} \frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4\gamma^2\Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2}}} \\ = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}}.$$

<sup>7</sup>Dass dieser Ansatz funktioniert wird formal z.B. durch den starken Satz [Heu09, Satz 16.5] gesichert. Dieser besagt folgendes. Sei die Inhomogenität der Form  $f(t) = (b_0 + b_1 t + \dots + b_m t^m) e^{\alpha t}$  mit  $\alpha, b_k \in \mathbb{C}$  und  $b_m \neq 0$ . Dann führt für  $p(\alpha) \neq 0$  immer der Ansatz  $x(t) = (A_0 + A_1 t + \dots + A_m t^m) e^{\alpha t}$  zur Lösung. Falls  $\alpha$  eine  $v$ -fach entartete Nullstelle ist, so führt der Ansatz  $x(t) = t^v (A_0 + A_1 t + \dots + A_m t^m) e^{\alpha t}$  zur Lösung.

Es ist nun interessant die Schwingungsamplitude  $A(\Omega)$  und die Phase  $\varphi(\Omega)$  zu betrachten, siehe Abb. 2. Es fällt auf, dass eine maximale Amplitude gerade mit einem Phasenversatz um  $\pi/2$  einhergeht.



**Abbildung 2:** Normierte Amplitude  $A(\Omega)/f_0$  (durchgezogen, linke Achse) und Phasenversatz  $\varphi(\Omega)$  (gestrichelt, rechte Achse), aufgetragen über der normierten Frequenz  $\Omega/\omega_0$  der treibenden Inhomogenität mit  $\gamma/\omega_0 = 0.1$  und  $f_0 = 1$ .

## 6 Lineare DGL $n$ -ter Ordnung mit variablen Koeffizienten ohne Inhomogenität

Wir wollen nun kurz den allgemeineren Fall

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_0(t)x = 0 \quad (6.1)$$

betrachten, bei dem die Koeffizienten ebenfalls von  $t$  abhängen. Es sei bemerkt, dass hierfür kein universelles Vorgehen zum Auffinden der allgemeinen Lösung existiert. Man hat jedoch den

### 6.1 Reduktionsatz von d'Alembert

Dieser ermöglicht es die Ordnung der DGL um 1 zu reduzieren, sofern bereits eine Lösung  $x_1(t)$  mit  $x_1(t) \neq 0 \quad \forall t \in J$  existiert. Die Idee dabei ist, den Ansatz  $x_2(t) = x_1(t)u(t)$  zu wählen.

Der Satz soll hier zwar aus Platzgründen nicht angegeben werden. Er findet sich z.B. in [Heu09, Kap. 23] oder [Gün08, S. 104].

Das Auffinden einer ersten Lösung  $x_1(t)$  kann in einigen Fällen z.B. durch die Ansätze

- $x(t) = c$
- $x(t) = at + b$
- $x(t) = at^2 + bt + c$
- $x(t) = a/t$

erfolgen.

## 6.2 Potenzreihenansatz

Sind die Koeffizientenfunktionen  $a_0(t), \dots, a_{n-1}(t)$  nicht nur stetig, sondern auch lokal als Potenzreihe um  $t_0$  entwickelbar, so führt der Ansatz

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(t - t_0)^k$$

mit anschließendem Koeffizientenvergleich zur Lösung. Näheres dazu findet sich z.B. in [Heu09, Kap. 26].

## 7 Lineare DGL $n$ -ter Ordnung mit variablen Koeffizienten mit Inhomogenität

### 7.1 Variation der Konstanten

Für variable Koeffizienten funktioniert das Konzept der Variation der Konstanten analog zum Fall aus 5.1.

(vgl. [Heu09, Kap. 24 und S. 181])

## 8 Wronski-Determinante

Als Ergänzung wollen wir noch kurz auf die Wronski-Determinante eingehen.

Will man untersuchen, ob ein System von Funktionen tatsächlich linear unabhängig ist, so kann man sich der **Wronski-Determinante**

$$W(x_1(t), \dots, x_n(t)) := \begin{vmatrix} x_1(t) & \cdots & x_n(t) \\ x_1^{(1)}(t) & \cdots & x_n^{(1)}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

bedienen, wobei wir annehmen wollen, dass die  $x_k(t)$  hinreichend oft differenzierbar sind. Gilt  $W(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)) \neq 0$  für irgendein  $t_0 \in J$  aus dem Definitionsbereich  $J$ , so gilt dies für alle  $t \in J$  und die Funktionen  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  sind linear unabhängig (auf  $J$ ).

## Literatur

- [Gün08] Heidrun Günzel. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Oldenbourg, 2008.
- [Heu09] Harro Heuser. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. 6. Auflage. Teubner Verlag, 2009.