

Klassische Mechanik - Zusammenfassung

Autor: Jan KRAUSE

16. Februar 2016

For updates, further material and reporting errors please visit <http://jkphysics.de>.

Inhaltsverzeichnis

| | |
|--|----------|
| 1 Newtonsche Mechanik | 1 |
| 1.1 Das Zweikörper-Problem | 1 |
| 2 Hamiltonsches Prinzip | 2 |
| 3 Noether Theorem | 2 |
| 4 Lagrange Formalismus 2. Art | 3 |
| 4.1 Anwendung | 3 |
| 4.2 Mechanische Eichfreiheit | 3 |
| 5 Lagrange Formalismus 1. Art | 3 |
| 6 Hamilton-Formalismus | 4 |
| 6.1 Legendre-Transformation | 4 |
| 6.1.1 Formale Definition | 4 |
| 6.1.2 Eigenschaften | 4 |
| 6.1.3 Anschauung und Intuition | 4 |
| 6.2 Hamiltonfunktion | 4 |
| 6.3 Poisson-Klammern | 5 |
| 6.4 Kanonische Transformationen | 5 |
| 7 Starrer Körper | 6 |
| Appendices | 7 |
| A Hilfreiche Relationen | 7 |
| A.1 Kronecker-Delta und Levi-Cevita Symbole | 7 |
| B Elektrodynamik | 7 |
| B.1 Lorentz-Transformation | 8 |

1 Newtonsche Mechanik

1 Drehimpuls

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}.$$

2 Der Lenz-Runge-Vektor

$$\mathbf{A} = \mathbf{v} \times \mathbf{L} + U(\mathbf{r})\mathbf{r}$$

3 ist eine Erhaltungsgröße.

1.1 Das Zweikörper-Problem

Zwei Massepunkte der Massen m_1, m_2 und Ortsvektoren $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ wechselwirken über das rein vom Abstand abhängige Potential $U(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|)$.

4 Gesamtmasse

$$M := m_1 + m_2.$$

4 Schwerpunkt

$$\mathbf{R} := \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{M}$$

$$\ddot{\mathbf{R}} = 0.$$

7 Reduzierte Masse

$$\mu := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

7 Abstand

$$\mathbf{r} := \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1.$$

Es kann dann die Dynamik für das *gedachte* Teilchen der Masse μ und des Abstandes \mathbf{r} vom Kraftzentrum bestimmt werden.

Aufgrund der Drehimpulserhaltung bewegt sich das Teilchen nur in einer Ebene, in welche wir die x - y -Ebene des Koordinatensystems legen und zur Beschreibung Zylinderkoordinaten verwenden.

Die Gesamtenergie

$$\begin{aligned} E &= \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + U(r) \\ &= \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r). \end{aligned}$$

ist erhalten und es folgt das Integral

$$t - t_0 = \int_{r_0}^r \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{\text{eff}}(r))}} dr,$$

welches es zu lösen und nach $r(t)$ aufzulösen gilt. Es empfiehlt sich mithilfe der Energieerhaltung zuerst r_{\min} zu berechnen und für die Integration $r_0 = r_{\min}$ zu wählen.

Mit Hilfe der gefundenen Lösung für $r(t)$ kann nun $\varphi(t)$ bestimmt werden. Wir nutzen, dass das Quadrat des Drehimpulses

$$L^2 = \mu r^2 \dot{\varphi}$$

erhalten ist und finden

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{t_0}^t \frac{L^2}{\mu r^2(t)} dt.$$

2 Hamiltonsches Prinzip

Lagrange-Funktion

$$L \equiv L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t),$$

Für die klassische, nicht-relativistische Mechanik lautet diese

$$L = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t),$$

vorausgesetzt die Kräfte lassen sich aus dem Potential ableiten durch

$$m\ddot{\mathbf{q}} = -\nabla_{\mathbf{q}} V.$$

Wirkung:

$$S[\gamma] := \int_{t_0}^{t_1} dt L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t).$$

Stationärer Punkt:

$$\delta S[\gamma] = 0.$$

Folgende Aussagen sind (für konservative Kraftfelder) äquivalent:

1. Die Bahnkurven $\mathbf{x}_i(t)$, $i \in \{1, \dots, N\}$ von N Massepunkten erfüllen die Newtonschen Bewegungsgleichungen $\mathbf{F}_i = m_i \mathbf{a}_i$.

2. Die Lagrange-Funktion ist durch

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{m_i}{2} \dot{\mathbf{x}}_i^2(t) + \mathbf{F}_i(t) \cdot \mathbf{x}_i(t) \right)$$

gegeben und $\delta S[\gamma] = 0$.

3. Die Lagrange-Funktion

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \equiv L = T - V$$

ist als Differenz der kinetischen und der potentiellen Energie gegeben und $\delta S[\gamma] = 0$.

4. Die Lagrange-Funktion

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \equiv L = T - V$$

ist als Differenz der kinetischen und der potentiellen Energie gegeben und die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \quad i \in \{1, \dots, 3N\}$$

sind erfüllt.

3 Noether Theorem

(vgl. [DK77])

Betrachte Funktionen (Transformationen)

$$T \equiv T(\mathbf{q}, \mathbf{q}, t, \epsilon),$$

$$\mathbf{Q} \equiv \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t, \epsilon),$$

für welche gelten soll, dass

$$T|_{\epsilon=0} = t,$$

$$\mathbf{Q}|_{\epsilon=0} = \mathbf{q}.$$

Außerdem betrachten wir die Zeitableitung der Q^i nach der neuen Zeit T :

$$\tilde{Q} \equiv \frac{d\mathbf{Q}}{dT} = \frac{d\mathbf{Q}}{dt} \frac{dt}{dT} = \frac{\dot{\mathbf{Q}}}{\dot{T}} = \frac{\dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, t, \epsilon)}{\dot{T}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, t, \epsilon)}$$

Liegt Invarianz der Lagrange-Funktion bezüglich der Transformation

$$t \rightarrow T \equiv T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t, \epsilon)$$

$$\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{Q} \equiv \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t, \epsilon)$$

$$\dot{\mathbf{q}} \rightarrow \tilde{\mathbf{Q}} \equiv \tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, t, \epsilon)$$

vor, so definiert

$$L\xi + \sum_i \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial \dot{q}^i} (\eta^i - \dot{q}^i \xi) - F$$

eine Erhaltungsgröße, wobei

$$\xi = \left. \frac{\partial T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t, \epsilon)}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0}$$

$$\eta^i = \left. \frac{\partial Q^i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t, \epsilon)}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0}$$

und

$$\dot{F} = \left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left[L(\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t, \epsilon), \tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t, \epsilon), T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t, \epsilon)) \right. \right. \\ \left. \left. \times \dot{T}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t, \epsilon) \right] \right|_{\epsilon=0}$$

4 Lagrange Formalismus 2. Art

4.1 Anwendung

- Zuerst geeignete Koordinaten wählen $\rightarrow 3N$ Koordinaten für N Teilchen in 3 Dimensionen.
- Lagrange-Funktion ($L = T - V$) aufstellen¹:

$$L^{(3N)} \equiv L(q^1, \dots, q^{3N}, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^{3N}, t)$$

- Dann Zwangsbedingungen formulieren:

$$F_\alpha(q, t) = 0 \quad \alpha = 1, \dots, k$$

- Mit diesen müssen nun die Freiheitsgrade auf $3N - k$ reduziert werden. Man erhält

$$L^{(3N-k)} \equiv L(q^1, \dots, q^{3N-k}, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^{3N-k}, t).$$

- Mit dieser Lagrange-Funktion werden nun die $3N - k$ Euler-Lagrange-Gleichungen bestimmt:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L^{(3N-k)}}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L^{(3N-k)}}{\partial q^i} = 0$$

$$i \in \{1, \dots, 3N - k\}.$$

Lagrange 2 erlaubt auch Reibung, siehe dazu z.B. [Fli15, Kapitel 9]

4.2 Mechanische Eichfreiheit

Die Euler-Lagrange-Gleichungen sind invariant unter der Transformation

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \rightarrow L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \frac{df(\mathbf{q}, t)}{dt}.$$

¹Das hochgestellte $(3N)$ an der Lagrange-Funktion soll lediglich als Unterscheidungsmerkmal zur Funktion mit reduzierter Anzahl der Argumente dienen.

5 Lagrange Formalismus 1. Art

Lassen sich die Zwangsbedingungen holonom formulieren, so funktioniert folgender Formalismus:

- Zuerst geeignete Koordinaten wählen $\rightarrow 3N$ Koordinaten für N Teilchen in 3 Dimensionen.
- Lagrange-Funktion ($L = T - V$) aufstellen:

$$L^{(3N)} \equiv L(q^1, \dots, q^{3N}, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^{3N}, t)$$

- Dann Zwangsbedingungen formulieren:

$$F_\alpha(q^i, t) = 0 \quad \alpha = 1, \dots, k$$

- Es wird nun nicht wie zuvor mit Hilfe der Zwangsbedingungen die Anzahl der Argumente der Lagrange-Funktion reduziert. Stattdessen wird die Lagrange-Funktion in der Art modifiziert, dass die Zwangsbedingungen mit Hilfe von Lagrange-Multiplikatoren berücksichtigt werden:

$$\tilde{L}^{(3N)} \equiv L^{(3N)} + \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha F_\alpha(q^1, \dots, q^{3N}, t)$$

- Mit dieser Lagrange-Funktion werden nun $3N$ Euler-Lagrange-Gleichungen bestimmt:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{L}^{(3N)}}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial \tilde{L}^{(3N)}}{\partial q^i} = 0$$

$$i \in \{1, \dots, 3N\}$$

und die Nebenbedingungen werden erfüllt durch

$$\frac{\partial \tilde{L}^{(3N)}}{\partial \lambda_\alpha} = 0.$$

- Die Zwangskräfte sind schließlich gegeben durch

$$Z^i = \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \frac{\partial F_\alpha}{\partial q^i}.$$

Lassen sich die Zwangsbedingungen nicht holonom, sondern nur differentiell aufstellen, so muss folgender, allgemeinere Weg gewählt werden:

6 Hamilton-Formalismus

6.1 Legendre-Transformation

6.1.1 Formale Definition

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Die Legendre-Transformation $f^* : I^* \rightarrow \mathbb{R}$ von f ist dann definiert als

$$f^*(x^*) := \sup_{x \in I} (x^*x - f(x)) \quad x^* \in I^*, \quad (6.1)$$

wobei der Definitionsbereich I^* gegeben ist durch

$$I^* = \left\{ x^* \in \mathbb{R} : \sup_{x \in I} (x^*x - f(x)) < \infty \right\}.$$

Man bezeichnet x^* auch als die zu x konjugierte Variable.

Auf höhere Dimensionen verallgemeinern lässt sich dieses Konzept für konvexe Funktionen $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ und konvexen Definitionsbereich $C \subseteq \mathbb{R}^n$ zur Transformierten $f^* : C^* \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f^*(x^*) := \sup_{x \in C} (\langle x^*, x \rangle - f(x)) \quad x^* \in C^*,$$

mit Definitionsbereich

$$C^* = \left\{ x^* \in \mathbb{R}^n : \sup_{x \in C} (\langle x^*, x \rangle - f(x)) < \infty \right\}$$

und Standardskalarprodukt $\langle x^*, x \rangle = \sum_{k=1}^n x_k^* x_k$.

6.1.2 Eigenschaften

Wir wollen uns nun auf hinreichend »schöne« Funktionen f beschränken, nämlich $f \in C^2(I)$, also zweimal differenzierbare Funktionen.

Weiterhin wollen wir unter einer konvexen Funktion f eine solche verstehen, für die $f''(x) > 0$ für alle $x \in I$ gilt, deren Krümmung also überall strikt positiv ist.

Wir können uns nun die Frage stellen, für welches $x \in I$ das Supremum in (6.1) angenommen wird² und stellen fest, dass dies gerade für jenes $x \in I$ der Fall ist bei dem die Differenz $x^*x - f(x)$ ein Supremum aufweist, also

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (x^*x - f(x)) &= 0 \\ \Leftrightarrow f'(x) = x^* &\Leftrightarrow x = (f')^{-1}(x^*). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Da dieser Punkt offenbar von x^* abhängt, macht es Sinn dafür eine Funktion zu definieren³:

$$\tilde{x}(x^*) = (f')^{-1}(x^*), \quad (6.3)$$

welche wir nun verwenden können um f^* einfacher zu schreiben als

$$f^*(x^*) = x^* \tilde{x}(p) - f(\tilde{x}(p)).$$

Weitere Eigenschaften sind

- f konvex $\Rightarrow f^*$ konvex
- $f^{**} = f$

6.1.3 Anschauung und Intuition

In (6.2) wurde ersichtlich, dass $x^* = f'(x)$. Im Rahmen der Physik nutzt man anstelle von x^* häufiger die Bezeichnung p . Beachte, dass z.B. der kanonische Impuls $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$ in dieser Art definiert wird. Die zugehörige Legendre-Transformation wird weiter unten behandelt und führt dann zur Hamiltonfunktion.

6.2 Hamiltonfunktion

Wir hatten bereits die **kanonischen Impulse** definiert. Durch Auflösen finden wir

$$p_i := \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial \dot{q}_i} \xrightarrow{\text{Auflösen}} \dot{q}_i := \dot{q}_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t).$$

Beachte: q_i entspricht der Funktion \tilde{x} aus (6.3). Wir definieren nun die **Hamiltonfunktion** als Legendre-Transformation der Lagrange-Funktion:

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) := \sum_i \dot{q}_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) p_i - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), t)$$

und finden damit die **Hamiltonschen Gleichungen**, auch genannt **kanonische Gleichungen**:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial q_i}.$$

Vorteile dieser Formulierung:

- leichtes Auffinden von Erhaltungsgrößen, z.B. durch

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_i = \text{const.}$$

- Aufzeigen der Analogien zur Quantenmechanik
- Überführung unterschiedlicher physikalischer Systeme ineinander mittels kanonischer Transformationen

²Im vorliegenden Fall wird das Supremum tatsächlich angenommen.

³Aufgrund der strikten Konvexität von f ist x wohldefiniert.

6.3 Poisson-Klammern

Wir betrachten nun zwei *physikalische Größen*

$$F \equiv F(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \quad K \equiv K(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$$

und definieren die Poisson-Klammer:

$$\{F, K\}_{q,p} := \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial K}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial K}{\partial q_i} \right).$$

Es folgt unmittelbar

$$\{F, K\} = -\{K, F\}.$$

Für eine weitere physikalische Größe $G \equiv G(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ folgt direkt

$$\{F, KG\} = \{F, K\}G + \{F, G\}K.$$

für eine Funktion $f(K)$ folgt

$$\{F, f(K)\} = \{F, K\} \frac{\partial f(K)}{\partial K}.$$

Es gilt die Jacobi-Identität

$$\{F, \{G, K\}\} = \{K, \{F, G\}\} = \{G, \{K, F\}\}$$

für beliebige Funktionen F, G, K , welche jeweils von $\mathbf{q}, \mathbf{p}, t$ abhängen.

Relevanz:

Die Zeitabhängigkeit der physikalischen Größen lässt sich über

$$\frac{dF}{dt} = \{F, K\} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

bestimmen und die Hamiltonschen Gleichungen bekommen die Form

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\}, \quad \dot{q}_i = \{q_i, H\}.$$

6.4 Kanonische Transformationen

(Vgl. [Gre03])

Unter einer kanonischen Transformation verstehen wir eine Transformation

$$\begin{aligned} q_i &\rightarrow Q_i \\ p_i &\rightarrow P_i \\ H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) &\rightarrow H'(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) \end{aligned}$$

sodass auch für die neuen Variablen noch die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen gelten, also

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H'(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)}{\partial Q_i}.$$

Eine Transformation

$$q_i \rightarrow Q_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \quad p_i \rightarrow P_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$$

ist genau dann kanonisch, wenn gilt

$$\begin{aligned} \{Q_i, P_j\}_{q,p} &= \delta_{ij}, \\ \{Q_i, Q_j\}_{q,p} &= \{P_i, P_j\}_{q,p} = 0. \end{aligned}$$

Der Index an der Poisson-Klammer deutet dabei an, dass nach den *alten* Variablen abzuleiten ist. Eine ausführliche Darstellung mit Beweis findet sich in [Pap14, S. 1180].

Erzeugende

Kanonische Transformationen können durch **Erzeugenden-Funktionen** erzeugt werden. Dies lässt sich folgendermaßen motivieren. Da sowohl für die alten als auch für die neuen Koordinaten das Hamiltonsche Prinzip erfüllt sein muss haben wir

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt = 0, \quad \delta \int_{t_1}^{t_2} L'(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t) dt = 0.$$

Für eine beliebige Funktion F gilt außerdem

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{dF}{dt} dt = 0,$$

sodass sich L und L' um diese totale Zeitableitung unterscheiden dürfen, i.e.

$$L' = L + \frac{dF}{dt}.$$

F ist im Allgemeinen eine Funktion aller alten und neuen Koordinaten, sowie der Zeit. Davon sind aber nur $n + 1$ unabhängig. Die gängigsten Kandidaten für F sind

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv F_1(q, Q, t), & F_2 &\equiv F_1(q, P, t), \\ F_3 &\equiv F_1(p, Q, t), & F_4 &\equiv F_1(p, P, t) \end{aligned}$$

und gehen durch

$$\begin{aligned} F_2 &= F_1 + \sum_i Q_i P_i, \\ F_3 &= F_1 - \sum_i q_i P_i, \\ F_4 &= F_3 + \sum_i Q_i P_i \end{aligned}$$

auseinander hervor. Eine kanonische Transformation ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, & P_i &= -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}, \\ p_i &= \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, & Q_i &= \frac{\partial F_2}{\partial P_i}, \\ q_i &= -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}, & P_i &= -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}, \\ q_i &= -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}, & Q_i &= \frac{\partial F_4}{\partial P_i}. \end{aligned}$$

Die Hamiltonfunktion transformiert in allen vier Fällen gemäß

$$H' = H + \frac{\partial F_k}{\partial t},$$

wobei die alten Koordinaten als Funktionen der neuen auszudrücken sind.

Beispiel.

Zu jeder Eichfreiheit-Transformation einer Lagrange-Funktion,

$$\begin{aligned} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) &\rightarrow L'(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \frac{df(\mathbf{q}, t)}{dt}, \\ q^i &\rightarrow Q^i = q^i, \\ p^i &\rightarrow P^i = \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}^i} \stackrel{\text{i.A.}}{\neq} p^i, \end{aligned}$$

lässt sich (mehr als) eine Erzeugende finden, deren zugehörige kanonische Transformation mit obiger übereinstimmt.

Die Umkehrung gilt nicht.

7 Starrer Körper

Eine schöne Darstellung des Themas findet sich in *Greiner, Klassische Mechanik II*, [Gre03].

Satz von Steiner.

Betrachte einen Körper der Masse M mit Trägheitsmoment I_s bezüglich einer Achse durch den Schwerpunkt. Dann ist das Trägheitsmoment bezüglich einer dazu parallel liegenden Achse mit Abstand b geg. durch

$$I = I_s + Mb^2.$$

⁴Nicht zu verwechseln mit der Lagrangefunktion L .

⁵ S heißt orthogonal, wenn $SS^T = S^T S = \mathbf{1}$ gilt.

Trägheitstensor

Die Definition $\mathbf{L} = \sum_k m_k (\mathbf{r}_k \times \mathbf{v}_k)$ motiviert zusammen mit $\mathbf{v}_k = \boldsymbol{\omega}_k \times \mathbf{r}_k$ folgende Definition.

Def. Trägheitstensor.

In einem Körperfesten Bezugssystem definieren wir

$$\begin{aligned} I_{ik} &:= \int_V (r^2 \delta_{ik} - x_i x_k) \varrho(\mathbf{r}) dV \\ &\stackrel{\varrho(\mathbf{r})=\varrho=\text{const.}}{=} \varrho \int_V (r^2 \delta_{ik} - x_i x_k) dV \end{aligned}$$

mit $r \equiv |\mathbf{r}|$.

In expliziter Tensor-Schreibweise:

$$\underline{I} = I^i_k \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^k.$$

Offenbar ist \underline{I} symmetrisch, also $I_{ik} = I_{ki}$.

Häufig legt man bei der Berechnung von \underline{I} den Ursprung des Koordinatensystems in den Massenschwerpunkt.

Damit finden wir für den Drehimpuls⁴ \mathbf{L} :

$$\begin{aligned} L_i &= I_{ik} \omega_k \\ \left(\mathbf{L} = (I^i_k \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^k) (\omega^j \mathbf{1} \otimes \mathbf{e}_j) \right). \end{aligned}$$

Die kinetische Energie T im Schwerpunktsystem lässt sich schreiben als

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L} = \frac{1}{2} \omega_i \omega_k I_{ik} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \underline{I} \boldsymbol{\omega}$$

Hauptträgheitsachsen

Da \underline{I} wie oben angesprochen symmetrisch ist, lässt sich \underline{I} mit einer orthogonalen⁵ Transformationsmatrix S diagonalisieren:

$$\underline{I}' = \text{diag}(I'_{11}, I'_{33}, I'_{33}) = S^T \underline{I} S$$

(vgl. Bosch, Lineare Algebra, S. 280, Theorem 6). Es existiert also ein Orthogonalsystem (Hauptträgheitsachsen-System) in welchem \underline{I} diagonale Gestalt annimmt.

Der Trägheitstensor \underline{I} wird als *Tensor* bezeichnet, weil er sich gerade gemäß

$$I'_{ij} = a_{ik} a_{j\ell} I_{k\ell}$$

transformiert, wobei die a_{ik} durch

$$a_{ik} := e'_i \cdot e_k$$

definiert sind.

Wie man leicht überprüft gilt $S_{ik} = a_{ki}$.

Trägheitsmoment entlang einer Achse

Sei \mathbf{n} ein Einheitsvektor, dann ist das Trägheitsmoment entlang \mathbf{n} geg. durch

$$I'_n = n_i n_k I_{ik}$$

Appendices

A Hilfreiche Relationen

A.1 Kronecker-Delta und Levi-Cevita Symbole

Mit gleichen Indices:

$$\begin{aligned}\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} &= \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km} \\ \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijn} &= 2\delta_{kn} \\ \delta_{ij}\delta_{jk} &= \delta_{ik}\end{aligned}$$

Vertauschung:

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon_{kij} = \epsilon_{jki}$$

Kreuzprodukt:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \epsilon_{ijk} a_i b_j \hat{e}_k$$

B Elektrodynamik

Im folgenden ist $q = -e$ die Elektronenladung. Nicht-relativistische Lagrange-Gleichung

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 - U(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$$

Relativistische Lagrange-Gleichung

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = -mc^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\dot{\mathbf{x}}}{c}\right)^2} - U(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$$

Vektorpotential

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= -(\nabla_{\mathbf{x}}\Phi)(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= (\nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{A})(\mathbf{x}, t)\end{aligned}$$

Potential eines Teilchens im elektromagnetischen Feld:

$$U(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = q\Phi(\mathbf{x}, t) - q\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$$

Damit ergibt sich für nicht relativistische Teilchen die Lagrange-Funktion

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 - q\Phi(\mathbf{x}, t) + q\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$$

und für relativistische

$$\begin{aligned}L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) &= -mc^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\dot{\mathbf{x}}}{c}\right)^2} \\ &\quad - q\Phi(\mathbf{x}, t) + q\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t).\end{aligned}$$

Der kanonische Impuls des nicht-relativistische Teilchen ergibt sich zu

$$\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{x}} + q\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$$

und die Hamiltonfunktion für das nicht-relativistische Teilchen lautet dann

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{x}, t))^2 + q\Phi(\mathbf{x}, t).$$

Man beachte, dass der **mechanische Impuls** stets $\mathbf{p}_{\text{mech}} = m\dot{\mathbf{x}}$ gilt. In diesem Falle ist er daher gegeben durch

$$\mathbf{p}_{\text{mech}} = \mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{x}, t).$$

B.1 Lorentz-Transformation

Vierer-Vektor:

$$x^\mu = (x^1, x^2, x^3, ct)$$

Lorentz-Boost in z -Richtung:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\beta\gamma \\ 0 & 0 & -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}$$

mit

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{|\mathbf{v}|}{c},$$

ergibt

$$\begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\beta\gamma \\ 0 & 0 & -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ ct \end{pmatrix}.$$

Literatur

- [DK77] Edward A. Desloge und Robert I. Karch. „Noether’s theorem in classical mechanics“. In: *American Journal of Physics* 45.4 (1977), S. 336–339.
- [Gre03] W. Greiner. *Klassische Mechanik II: Teilchensysteme - Lagrange-Hamiltonsche Dynamik - Nichtlineare Phänomene*. Klassische Mechanik. Deutscher, 2003.

[Pap14] John G. Papastavridis. *Analytical Mechanics - A Comprehensive Treatise on the Dynamics of Constrained Systems*. Reprint Edition. World Scientific, 2014.

[Fli15] Torsten Fließbach. *Mechanik - Lehrbuch zur Theoretischen Physik I*. 7. Auflage. Springer Spektrum, 2015.